



ce
pre
UNI

CICLO
PREUNIVERSITARIO

2024-1

Álgebra

TEMA

Operaciones con Polinomios



Contenido

Adición y sustracción de polinomios

Multiplicación de polinomios

Algoritmo de la división de polinomios

Método de Horner

Regla de Ruffini



ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN DE POLINOMIOS

Dados los polinomios

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \quad \text{y} \quad Q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_mx^m$$

Adición

Se denomina adición de los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ a otro polinomio denotado y determinado por:

$$P(x) + Q(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_ix^r$$

Donde: $\forall i \in \{0, 1, 2, \dots, \max\{n, m\}\}: c_i = a_i + b_i$

Sustracción

Se denomina sustracción de los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ a otro polinomio denotado y determinado por:

$$P(x) - Q(x) = d_0 + d_1x + d_2x^2 + \cdots + d_jx^s$$

Donde: $\forall j \in \{0, 1, 2, \dots, \max\{n, m\}\}: c_j = a_j + b_j$

ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN DE POLINOMIOS

Ejemplo 1: Determine la adición de

$$P(x) = 7 + 2x - 5x^3 + 8x^5 \text{ y } Q(x) = -3 + 7x + 4x^3 - 2x^6$$

Solución:

Para determinar la adición de $P(x)$ y $Q(x)$, debemos reducir los términos semejantes de dichos polinomios. Es decir:

$$P(x) + Q(x) = (7 - 3) + (2x + 7x) + (-5x^3 + 4x^3) + 8x^5 - 2x^6$$

$$\text{Finalmente: } P(x) + Q(x) = 4 + 9x - x^3 + 8x^5 - 2x^6$$

Ejemplo 2: Determine la sustracción de

$$P(x) = -4 + 2x^2 + 4x^5 - x^6 \text{ y } Q(x) = -3 - 2x^2 + 7x^5 - 2x^6$$

Solución:

De manera similar al caso de adición de polinomios. Es decir:

$$P(x) - Q(x) = (-4 + 3) + (2x^2 + 2x^2) + (4x^5 - 7x^5) + (-x^6 + 2x^6)$$

$$P(x) - Q(x) = -1 + 4x^2 - 2x^5 + x^6$$

ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN DE POLINOMIOS

Teorema

Sean P , Q , $P + Q$ y $P - Q$ polinomios no nulos, entonces se cumple:

a) $gr(P + Q) \leq \max \{gr(P) ; gr(Q)\}$

b) $gr(P - Q) \leq \max \{gr(P) ; gr(Q)\}$

Ejemplo

a) $P(x) = -5x^6 + 8x^3 ; Q(x) = 5x^6 - 2x^2 \Rightarrow \underbrace{gr(P + Q)}_3 \leq \max \left\{ \underbrace{gr(P)}_6 ; \underbrace{gr(Q)}_6 \right\}$

b) $P(x) = 7x^5 - 9x^2 ; Q(x) = -7x^5 + x^2 \Rightarrow \underbrace{gr(P - Q)}_5 \leq \max \left\{ \underbrace{gr(P)}_5 ; \underbrace{gr(Q)}_5 \right\}$

ADICIÓN DE POLINOMIOS

Propiedades de la adición de polinomios

Dados los polinomios $P(x)$, $Q(x)$ y $R(x)$. Se cumple:

- 1) Propiedad Conmutativa: $P(x) + Q(x) = Q(x) + P(x)$
- 2) Propiedad Asociativa: $(P(x) + Q(x)) + R(x) = P(x) + (Q(x) + R(x))$
- 3) Existencia del Elemento Neutro: $P(x) + 0 = P(x)$
- 4) Existencia del Elemento Opuesto: El elemento opuesto de un polinomio $P(x)$, denotado por $-P(x)$ se obtiene cambiando cada coeficiente de $P(x)$. Es decir $P(x) + (-P(x)) = 0$
- 5) $P(x) + (-Q(x)) = P(x) - Q(x)$

Problema 151:

Dados los polinomios no nulos $P(x)$ y $Q(x)$. Determine la verdad (V) o falsedad (F) de las siguientes afirmaciones:

- I. Si el grado de $P(x) + Q(x)$ es 4 entonces el grado de $P(x)$ es 4 o el grado de $Q(x)$ es 4.
- II. El grado de $P(x) + Q(x)$ siempre es igual que el grado de $P(x) - Q(x)$
- III. El grado de $3P(x) + 2Q(x)$ siempre es igual que el grado de $P(x) + Q(x)$

A) VVV

B) VFF

C) FFV

D) FVV

E) FFF

Clave E

MULTIPLICACIÓN DE POLINOMIOS

Sean los polinomios:

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m \text{ y } Q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n$$

Se define la multiplicación de $P(x)$ y $Q(x)$ mediante:

$$P(x) \cdot Q(x) = P(x) \cdot b_0 + P(x) \cdot b_1x + P(x) \cdot b_2x^2 + \dots + P(x) \cdot b_nx^n$$

Ejemplo:

$$\begin{aligned} P(x) \cdot Q(x) &= (x + 2x^2 - 3x^3)(4 + 5x + 6x^2) \\ &= x(4 + 5x + 6x^2) + 2x^2(4 + 5x + 6x^2) - 3x^3(4 + 5x + 6x^2) \\ &= 4x + 5x^2 + 6x^3 + 8x^2 + 10x^3 + 12x^4 - 12x^3 - 15x^4 - 18x^5 \\ &= 4x + 13x^2 + 4x^3 - 3x^4 - 18x^5 \end{aligned}$$

MULTIPLICACIÓN DE POLINOMIOS

Propiedades de la multiplicación de polinomios

Dados los polinomios $P(x)$, $Q(x)$ y $R(x)$, se cumple:

1) Si $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios no nulos, entonces:

$$gr(P(x) \cdot Q(x)) = gr(P(x)) + gr(Q(x))$$

$$gr(P(x))^n = n \cdot gr(P(x)); n \in \mathbb{N}, P(x) \neq 0$$

2) Propiedad conmutativa: $P(x) \cdot Q(x) = Q(x) \cdot P(x)$

3) Propiedad asociativa : $[P(x) \cdot Q(x)] \cdot R(x) = P(x) \cdot [Q(x) \cdot R(x)]$

4) La multiplicación de polinomios homogéneos da como resultado un polinomio homogéneo.

MULTIPLICACIÓN DE POLINOMIOS

- 5) El coeficiente principal de un producto de polinomios es igual al producto de los coeficientes principales de los factores.
- 6) El término independiente de un producto de polinomios es igual al producto de los términos independientes de los factores.
- 7) La suma de coeficientes de un producto de polinomios es igual al producto de las sumas de coeficientes de los factores.

8) Grados especiales

$gr\left(\frac{P(x)}{Q(x)}\right) = gr(P(x)) - gr(Q(x))$, tal que $\frac{P(x)}{Q(x)}$ es un polinomio y $Q(x) \neq 0$

$gr\left(\sqrt[n]{P(x)}\right) = \frac{1}{n} gr(P(x))$, $n \in \mathbb{N} - \{1\}$ y $\sqrt[n]{P(x)}$ es un polinomio

MULTIPLICACIÓN DE POLINOMIOS

Ejemplo

Sea $P(x)$ un polinomio de grado $(3n + 2)$; $Q(x)$ un polinomio de grado $(4n - 3)$; $R(x)$ es un polinomio de grado $(2n + 1)$. Si el grado del polinomio $P^2(x)Q(x) + Q^2(x)R(x) - R^3(x)$ es 31. Determine el grado de $Q(x)$

Solución

$$gr(P^2Q) = 2(3n + 2) + 4n - 3 = 10n + 1$$

$$gr(Q^2R) = 2(4n - 3) + 2n + 1 = 10n - 5$$

$$gr(R^3) = 3(2n + 1) = 6n + 3$$

$$10n + 1 = 31 \rightarrow n = 3$$

$$\text{Luego } gr(Q(x)) = 4(3) - 3 = 9$$

MULTIPLICACIÓN DE POLINOMIOS

Ejemplo

Si el grado del producto de tres polinomios completos y en una variable, de $(2n - 2)$, $(n + 1)$ y $(4n + 3)$ términos es igual a 34. Determine la diferencia de la suma de coeficientes y el término independiente del polinomio: $f(x) = 5nx^{n+2} - 4x^{n-1} + n^2 + 1$

Solución

$$(2n - 3) + n + (4n + 2) = 34 \Rightarrow 7n - 1 = 34 \Rightarrow n = 5$$

$$f(1) - f(0) = 5n - 4 + n^2 + 1 - (n^2 + 1)$$

$$f(1) - f(0) = 5(5) - 4 = 21$$

$$\text{Por tanto } f(1) - f(0) = 21$$

Problema 152:

El polinomio

$x^4 + 5x^3 + (m - n)x^2 + px + q - 1$ es igual al producto de los siguientes polinomios: $x^2 + mx - n$ y $x^2 + nx - m$; donde $n \neq 2$. Determine el valor de $m + 5n + p + q$.

A) -5

B) -1

C) 0

D) 1

E) 5

Clave: D

DIVISIÓN DE POLINOMIOS

Algoritmo de la división de polinomios

Sean $D(x)$ y $d(x)$ dos polinomios llamados dividendo y divisor en un cuerpo K , $d(x) \neq 0$.

Existen los polinomios únicos $q(x)$: cociente y $r(x)$: residuo tales que:

$$D(x) \equiv d(x) \cdot q(x) + r(x)$$

donde $r(x) = 0 \vee [gr(r(x)) < gr(d(x))]$

Ejemplo 1

Determine el cociente y el residuo al dividir $x^7 + 2$ por $x^4 + 3$

Solución

Usando el algoritmo de la división de polinomios

$x^7 + 2 \equiv (x^4 + 3)(x^3) - 3x^3 + 2$, al ser q y r únicos

Entonces $q(x) = x^3$, $r(x) = -3x^3 + 2$

DIVISIÓN DE POLINOMIOS

Ejemplo 2

Determine el cociente y el residuo al dividir $x^2 + 7$ por $x^2 - 3$

Solución

Usando el algoritmo de la división de polinomios

$x^2 + 7 = (x^2 - 3)(1) + 10$, al ser q y r únicos $q(x) = 1, r(x) = 10$

Ejemplo 3

Determine el cociente y el residuo al dividir $5x$ por $x^2 + 2$

Solución

Usando el algoritmo de la división de polinomios

$5x = (x^2 + 2)(0) + 5x$, al ser q y r únicos $q(x) = 0, r(x) = 5x$

DIVISIÓN DE POLINOMIOS

Esquema de la división

$$\begin{array}{l} D \mid d \\ r \quad q \end{array}$$

Si $r = 0$, la división se denomina exacta

Si $r \neq 0$, la división se denomina inexacta

Si $gr(D(x)) \geq gr(d(x))$ entonces $gr(r(x))$ es a lo mas $gr(d(x)) - 1$

DIVISIÓN DE POLINOMIOS

Alteraciones de la división

$$D \equiv dq + r$$

- $D \equiv (kd)(\frac{q}{k}) + r$
- $D \equiv (\frac{d}{k})(kq) + r$
- $kD \equiv (kd)q + kr$

$$\begin{array}{l} D \overline{) d} \\ r \quad q \end{array}$$

- $\begin{array}{l} D \overline{) dk} \\ r \quad q/k \end{array}$
- $\begin{array}{l} D \overline{) d/k} \\ r \quad kq \end{array}$
- $\begin{array}{l} kD \overline{) kd} \\ kr \quad q \end{array}$

Problema 154:

Sea $P(x) = x^3 + ax^2 - bx - 4$ un polinomio divisible entre $x^2 - 1$. Si la suma de valores de x que cumple $P(x) = 0$ es -4 . Calcule el producto de a y b .

A) -7 B) -4 C) 4 D) 5 E) 8

Clave: C

Problema 155:

Sabiendo que el residuo de la división $x^{n+1} + 2x^n + 2n + 2$ entre $x^n + n + 1$ es $(n - 5)x$.

Halle el valor de $2n$.

A) 1

B) 2

C) 3

D) 4

E) 5

Clave: D

MÉTODOS DE DIVISIÓN DE POLINOMIOS

Método Clásico

- 1) Se completan y ordenan los polinomios con respecto a una sola letra en forma descendente.
- 2) Se divide el primer término del dividendo entre el primero del divisor obteniéndose el primero del cociente, luego este se multiplica por cada uno de los términos del divisor y el resultado se resta del dividendo.
- 3) Se baja el siguiente término del dividendo y se repite el paso anterior tantas veces hasta que el grado del residuo sea menor que el grado del divisor

Método clásico de división de polinomios

Ejemplo

Dividir $3x^5 - 6x^4 + 13x^3 - 9x^2 + 11x - 1$ por $x^2 - 2x + 3$

Solución

$$\begin{array}{r}
 3x^5 - 6x^4 + 13x^3 - 9x^2 + 11x - 1 \quad \overline{) \quad x^2 - 2x + 3} \\
 \underline{-3x^5 + 6x^4 - 9x^3} \\
 4x^3 - 9x^2 + 11x \\
 \underline{-4x^3 + 8x^2 - 12x} \\
 -x^2 - x - 1 \\
 \underline{x^2 - 2x + 3} \\
 -3x + 2
 \end{array}$$

$$3x^3 + 4x - 1$$

De aqui:

$$q(x) = 3x^3 + 4x - 1$$

$$r(x) = -3x + 2$$

Método de Horner

Esquema de Horner

		n términos ← →	
d		Coeficientes del	dividendo
(-1) × }	i		
	v		
	i		
	s		
	o		
	r		
		Coeficientes del	Coeficientes del residuo
		cociente	

$n = \text{grado del divisor}$

Método de Horner

Ejemplo

Dividir por el método de Horner $8x^6 + 2x^5 + 5x^4 + 9x^2 + 5x - 6$ entre $2x^3 - x^2 + 2$

Solución

						3 términos		
	2	8	2	5	0	9	5	-6
	1		4	0	-8			
(-1) × {	0			3	0	-6		
	-2				4	0	-8	
						-2	0	4
		4	3	4	-2	1	-3	-2

COCIENTE: $q(x) = 4x^3 + 3x^2 + 4x - 2$

RESIDUO: $r(x) = x^2 - 3x - 2$

Método de Horner

Ejemplo

Si la división de $ax^4 + bx^3 + 2x^2 + 8x - 3$ entre $x^2 - 3x + 1$ es exacta. Determinar $a + b$

Solución: Como la división es exacta, se puede dividir en orden inverso

1	-3	8	2	b	a
3		-9	3		
-1			-3	1	
				6	-2
	-3	-1	2	0	0

$$b + 7 = 0 \rightarrow b = -7$$

$$a - 2 = 0 \rightarrow a = 2$$

Por tanto $a + b = -5$

Problema 156:

Si el residuo que resulta de dividir $(x^4 - 3x^3 + ax^2 + bx + c + 2)$ entre $(x - 1)^3$ es $(bx + c)^2$. Halle el mínimo valor de $J = 9a + 3b + c$

A) 24

B) 25

C) 26

D) 30

E) 31

Clave: C

Regla de Ruffini

Regla de Ruffini

Se usa para dividir polinomios $P(x)$ por binomios de la forma

$$x + b, b \in \mathbb{R}$$

Esquema de Ruffini (divisor: $x + b$)



$$gr(d(x)) = 1 \rightarrow gr(r(x)) = 0 \rightarrow \text{residuo} = \text{constante}$$

Regla de Ruffini

Ejemplo

Dividir $x^4 - 8x^3 - x^2 - 4$ por $x + 3$

Solución

	1	- 8	- 1	0	- 4
- 3		- 3	33	-96	288
	1	-11	32	-96	284

$$q(x) = x^3 - 11x^2 + 32x - 96$$

$$r(x) = 284$$

Problema 161:

Al efectuar la división

$$x^5 + 2nx^4 + n(m + 2n)x^3 - (m^3 - n^3)x^2 + mx + mn \text{ entre } x - m + n.$$

Determine el termino independiente del cociente

A) m

B) m^2

C) n

D) n^2

E) $m + n$

Clave: A

Regla de Ruffini

Ruffini para divisor $(ax + b), a \neq 0$

El divisor $(ax + b)$ lo dividimos por a , obtenemos $x + \frac{b}{a}$ pero el cociente queda multiplicado por a , hacemos la división y el cociente obtenido se divide por a , el residuo no cambia

Original

$$\begin{array}{r|l} D & d \\ r & q \end{array}$$



Alterada

$$\begin{array}{r|l} D & d/a \\ r & aq \end{array}$$

Regla de Ruffini

Ejemplo

Dividir $2x^4 - 30x^2 + 11x + 7$ por $\frac{x}{4} + 1$ usando la regla de Ruffini

Solución

Alteramos el divisor: $4\left(\frac{x}{4} + 1\right) = x + 4$ el cociente inicial queda dividido por 4

	2	0	-30	11	7
-4		-8	32	-8	-12
	2	-8	2	3	-5

$$q'(x) = 2x^3 - 8x^2 + 2x + 3 \rightarrow q(x) = 4q'(x) = 8x^3 - 32x^2 + 8x + 12$$

$$r(x) = -5$$

Regla de Ruffini

Ruffini para divisor $x^n + b$

Solo se puede hacer la división, si los exponentes del dividendo son multiples del exponente del divisor, esto permite hacer el cambio de variable $y = x^n$, que reduce el problema a dividir $P(y)$ por $(y + b)$.

Ejemplo

Dividir $4x^{15} - 4x^{10} + 3x^5 + 9$ por $2x^5 + 1$

Solución

Sea $y = x^5$, dividimos $4y^3 - 4y^2 + 3y + 9$ por $2y + 1$, alteramos el divisor:

$$\frac{2y + 1}{2} = y + \frac{1}{2}, \text{ el cociente queda multiplicado por } 2$$

Regla de Ruffini

Se divide $4y^3 - 4y^2 + 3y + 9$ por $y + \frac{1}{2}$

	4	- 4	3	9
$-\frac{1}{2}$		- 2	3	-3
	4	-6	6	6

$$q'(y) = 4y^2 - 6y + 6 \rightarrow q(y) = \frac{q'(y)}{2} = \frac{4y^2 - 6y + 6}{2} = 2y^2 - 3y + 3$$

$$q(x^5) = 2(x^5)^2 - 3(x^5) + 3 = 2x^{10} - 3x^5 + 3$$

$$r(x) = 6$$

Regla de Ruffini

Evaluación de $P(x)$ usando el algoritmo de Ruffini

$$\left. \begin{matrix} P(x) \\ r \end{matrix} \right| \begin{matrix} x - a \\ q \end{matrix} \Bigg\} \rightarrow P(x) \equiv (x - a)q(x) + r$$

Si $x = a \rightarrow P(a) = r$ (residuo)

Ejemplo

Si $P(x) = (1 - \sqrt{2})x^4 + \sqrt{2}x^3 - \sqrt{2}x + 3 - \sqrt{2}$,
determine el valor de $P(1 + \sqrt{2})$.

Solución

	$1 - \sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	0	$-\sqrt{2}$	$3 - \sqrt{2}$
$1 + \sqrt{2}$		-1	1	$1 + \sqrt{2}$	$1 + \sqrt{2}$
	$1 - \sqrt{2}$	$-1 + \sqrt{2}$	1	1	4

→ $P(1 + \sqrt{2}) = 4$

Problema 162:

Dado el siguiente polinomio

$$P(x) = x^5 + 3\sqrt[3]{3}x^3 - 3x^2 + (\sqrt[3]{3} + 1)^2$$

Halle $P(\sqrt[3]{3} - 1)$.

A) 0

B) $\sqrt[3]{3}$

C) $4\sqrt[3]{3}$

D) $\sqrt[3]{3} - 1$

E) $\sqrt[3]{3} + 1$

Clave: C